

2. VJEROJATNOST

Događaji

ω – elementarni događaj (bilo koji ishod slučajnog pokusa)

Ω – sigurni događaj (skup svih elementarnih događaja)

A, B, C, \dots – događaji (podskupovi od Ω , sastoje se od elementarnih događaja)

\emptyset – nemoguć događaj

1. Bacamo jednu kocku. Odredite elementarne događaje u događajima:

- A - {pao je prost broj},
- B - {pao je broj djeljiv s 3},
- C - {pao je broj koji je djeljitelj broja 10}.

bacamo kocku skup svih rezultata, tj. elementarnih događaja
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

događaji
 a) $A = \{2, 3, 5\}$

b) $B = \{3, 6\}$

c) $C = \{1, 2, 5\}$

2. Proizvodi koji silaze s proizvodne trake označavaju se slovom D-dobri i L-loši. Označavanje traje dok se ne označe 2 loša proizvoda uzastopno ili dok se ne izvrše ukupno 4 oznake. Registrira se dobiveni niz slova D i L. Odredite prostor elementarnih događaja i prikažite pomoću njih događaje

- A - {označeno je više D nego L},
- B - {označavanje je stalo u prva tri koraka}.

sluč. pokus = dok 2 loše ili 4 ukupno
 uzastopno

prostor elementarnih događaja $\Omega = \{LL, DLL, DDLL, \\ DLDL, LDLD, LDDL, \\ DDDL, DDLD, DLDD, LDDD, \\ DDDD, LDDL\}$

a) $A = \{DDDL, DDLD, DLDD, LDDD, DDDD\}$

b) $B = \{LL, DLL\}$

↓
 ne u 3. već u prva 3 koraka

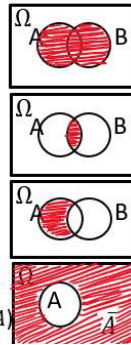
Operacije na događajima (Skupovine)

$A \cup B = \{\text{ostvario se barem jedan od događaja } A \text{ i } B\}$

$A \cap B = \{\text{ostvarila su se oba događaja } A \text{ i } B\}$

$A \setminus B = \{\text{ostvario se događaj } A, \text{ a nije se ostvario } B\}$
 Vrijedi $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

$\bar{A} = \{\text{nije se ostvario događaj } A\}$ (suprotan/komplement od A)



\cup unija = udn̄teenje

\cap presjek = zajednički

3. Bacamo dva novčića. Odredite elementarne događaje u događajima:

- a) A - {glava na prvom novčiću}, B - {pismo na prvom novčiću},
- b) C - {barem jedna glava}, D - {barem jedno pismo},
- c) $B \cup D, B \cap D,$
- d) $A \cup B, A \cap B,$
- e) $C \cup D, C \cap D.$

skup/prostor
sila
elementarni
događaji

$\Omega = \{GG, GP, PG, PP\}$

*2 novčić
1. 2. novčić
1. 2.
1. 2.*

$$a) A = \{GG, GP\} \quad B = \{PG, PP\}$$

$$b) C = \{GG, GP, PG\} \quad D = \{GP, PG, PP\}$$

*barema
1 gl. = 1 ili više*

$$c) B \cup D = \{PG, PP, GP\} = D \quad B \cap D = \{PG, PP\} = B$$

\cup unija = udn̄teenje

\cap presjek = zajednički

$$e) C \cup D = \{GG, GP, PG, PP\} = \Omega$$

$$C \cap D = \{PG, GP\}$$

$$d) A \cup B = \{GG, GP, PG, PP\} = \Omega$$

$$A \cap B = \emptyset$$

4. Bacamo dvije kocke. Odredite elementarne događaje u događajima:

- a) A - {zbroy brojeva na kockama je neparan},
- b) B - {barem jedna kocka je pala na 1},
- c) C - {zbroy brojeva na kockama je 5},
- d) $B \cap C$,
- e) $A \cap B$,
- f) $\bar{A} \cap B$

dvije kocke \rightarrow mogućih rezultata
(elemen. događaja) $\frac{6}{1} \cdot \frac{6}{2} = 36$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} 1.2. \\ 11, 12, 13, 14, 15, 16, \\ 21, 22, 23, 24, 25, 26, \\ 31, 32, 33, 34, 35, 36, \\ 41, 42, 43, 44, 45, 46, \\ \text{zbroy} \\ 5 \\ 51, 52, 53, 54, 55, 56, \\ 61, 62, 63, 64, 65, 66 \end{array} \right\}$$

zbroy neparan

$$a) A = \{1 \text{ neparan i } 1 \text{ paran}\}$$

$$A = \{12, 14, 16, 21, 23, 25, 32, 34, 36, 41, 43, 45, 52, 54, 56, 61, 63, 65\}$$

$$b) B = \{\text{barem } 1 \text{ pala na } 1\}$$

$$B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 31, 41, 51, 61\}$$

$$c) C = \{\text{zbroy } 5\}$$

$$C = \{41, 32, 23, 14\}$$

$$d) B \cap C = \{41, 14\}$$

zajedničke

$$e) A \cap B = \{\text{zbroy neparan i jedinice}\}$$

$$= \{12, 14, 16, 21, 41, 61\}$$

$$f) \boxed{\bar{A} \cap B = B \setminus A}$$

bez

$$= \{11, 13, 15, 31, 51\}$$

5. Dva strijelca S_1 i S_2 gađaju u jednu metu, svaki sa po jednim metkom. Neka su događaji $A_i = \{\text{metu je pogodio strijelac } S_i\}$, $i = 1, 2$.

- Odredite prostor elementarnih događaja.
- Pomoću A_i prikažite A - {meta je pogođena točno jednom}.
- Pomoću A_i prikažite B - {meta nije pogođena}.
- Kakav je događaj C - {meta je pogođena sa 3 metka}?
- Što znači događaj $D = (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (A_1 \cap A_2)$?

$$A_1 = \{\text{metu je pogodio } S_1\}$$

$$A_2 = \{\text{metu je pogodio } S_2\}$$

0 - promašaj

1 - pogodak

a) $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$ ^{1. 2. str.}

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ $\overline{A_1} \cap A_2$ $A_1 \cap \overline{A_2}$ $A_1 \cap A_2$

b) pomoću operacije sa događajima:

$$A = (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2})$$

meta pogođena jednom

$$A = \{10, 01\}$$

c) $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$

meta nije pogođena

$$B = \{00\}$$

d) $C = \emptyset$

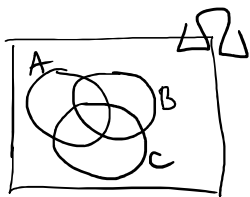
s 3 metkom nemoguće

exprnuto
Što znači događaj $D = (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (A_1 \cap A_2)$

nijeka će $D = \{\text{pogodio barem 1 strijelac}\}$

6. Neka su A, B i C događaji. Koristeći se operacijama s događajima, napišite izraze za sljedeće događaje:

- a) Ostvarila su se sva tri događaja, b) Ostvarila su se točno dva događaja,
c) Ostvarila su se barem dva događaja, d) Nije se ostvario nijedan događaj.



ostvarilo se A

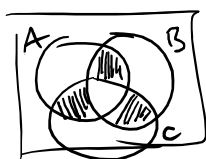


i i i

a) ostvarile su sva 3 : $A \cap B \cap C$

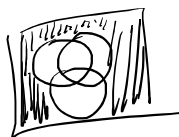


b) točno 2: $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$



c) barem 2: $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

d) niti jedan: $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ ili $\overline{A \cup B \cup C}$



Vjerojatnost

Vjerojatnost je funkcija koja svakom događaju pridružuje realan broj te ima određena svojstva.

Naime, vjerojatnost je preslikavanje $P : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$ definirano na algebri događaja \mathcal{F} , za koje vrijedi:

1) $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0,$

(normiranost)

2) ako $A \subset B$, tada $P(A) \leq P(B),$

(monotonost)

3) Ako su A i B **disjunktni događaji** (tj. ako nemaju zajedničkih elemenata), tada vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

(aditivnost)

Broj $P(A)$ zovemo vjerojatnošću događaja A.

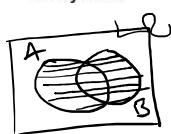
Svojstva:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

→ vjerojatnost komplementa

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

→ vjerojatnost unije



disjunktni:
= nemaju ništa
= presjek

↑ izmjeriti 0 i 1

7. Ako su A i B događaji, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.8$, izračunajte vjerojatnosti $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap B)$, $P(A \cap \bar{B})$.

$$P(A) = 0.6$$

$$P(B) = 0.4$$

$$P(A \cup B) = 0.8$$

$$P(\bar{A}) = ?$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$P(A \cap B) = ?$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.6 + 0.4 - 0.8 \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = ?$$



$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.4 - 0.2 \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = ?$$



$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= 0.6 - 0.2 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

ili: $P(A \cup B) - P(B)$

8. Ako su A i B događaji, $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$, $P(\bar{A}) = 0.6$, izračunajte vjerojatnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(A \setminus B)$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

$$P(A \cup B) = 0.8$$

$$P(A \cap B) = 0.2$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$\underline{P(\bar{A}) = 0.6}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

✓ ✓ ? ✓

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$$

$$P(B) = 0.8 - 0.4 + 0.2$$

$$\underline{P(B) = 0.6}$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= 0.4 - 0.2$$



$$= 0.2$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) \stackrel{\text{de Morgan}}{=} P(\overline{A \cap B}) \stackrel{\text{komplement}}{=} 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$\boxed{P(\bar{*}) = 1 - P(*)}$$

Vjerojatnosni prostor koji se sastoji od konačno mnogo elementarnih događaja zovemo konačnim vjerojatnosnim prostorom. Ako je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, vjerojatnosti elementarnih događaja označavamo s

$$p_1 = P(\{\omega_1\}), p_2 = P(\{\omega_2\}), \dots, p_n = P(\{\omega_n\})$$

i za njih vrijedi

$$\underline{p_1 > 0, p_2 > 0, \dots, p_n > 0}$$

te

$$\boxed{p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.}$$

Vjerojatnost nekog događaja A dobijemo kao zbroj vjerojatnosti elementarnih događaja iz A.

Primjerice, ako je $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$, tada je $P(A) = p_1 + p_2 + p_4$.

9. Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ i $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3, 4$. Je li preslikavanje $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ vjerojatnost ako je:

- $p_1 = 0.25, p_2 = 0.25, p_3 = 0.25, p_4 = 0.2$,
- $p_1 = 0.3, p_2 = 0.4, p_3 = 0.5, p_4 = -0.2$,
- $p_1 = 0.25, p_2 = 0.25, p_3 = 0.25, p_4 = 0.25$?

a) NE, tkoj nije 1

b) NE, jer p_4 nije > 0

c) DA

10. Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Ako je $P(\{\omega_1, \omega_2\}) = 0.7, P(\{\omega_2, \omega_3\}) = 0.6$, odredite vjerojatnosti događaja $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}$.



10. Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Ako je $P(\{\omega_1, \omega_2\}) = 0.7$, $P(\{\omega_2, \omega_3\}) = 0.6$,
odredite vjerojatnosti događaja $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\{\omega_3\}$.



$$P(\{\omega_1, \omega_2\}) = 0.7$$

$$P(\{\omega_2, \omega_3\}) = 0.6$$

$$p_1, p_2, p_3 = ?$$

$$P(\{\omega_1\})$$

$$\rightarrow p_1 + p_2 = 0.7$$

$$\rightarrow p_2 + p_3 = 0.6$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_1 + 0.6 = 1$$

$$p_1 = 0.4$$

$$0.7 + p_3 = 1$$

$$p_3 = 0.3$$

$$p_2 = 0.3$$

2- način
ali je isto

$$P(A) + P(\{\omega_3\}) = 1$$

$$0.7 + p_3 = 1$$

$$p_3 = 0.3$$

9. Izračunajte vjerojatnosti događaja A i B iz zadatka 2. ako loši proizvodi silaze s proizvodne trake s dvostruko manjom vjerojatnošću nego dobri.

$$A = \{ \overset{\omega_1}{D} \overset{\omega_2}{D} \overset{\omega_3}{D} \overset{\omega_4}{L}, \overset{\omega_1}{D} \overset{\omega_2}{D} \overset{\omega_3}{L} \overset{\omega_4}{D}, \overset{\omega_1}{D} \overset{\omega_2}{L} \overset{\omega_3}{D} \overset{\omega_4}{D}, \overset{\omega_1}{L} \overset{\omega_2}{D} \overset{\omega_3}{D} \overset{\omega_4}{D}, \overset{\omega_1}{D} \overset{\omega_2}{D} \overset{\omega_3}{D} \overset{\omega_4}{D} \}$$

$$B = \{ \overset{\omega_6}{L} \overset{\omega_7}{L}, \overset{\omega_6}{D} \overset{\omega_7}{L} \}$$

$$p_L = \frac{1}{2} p_D \rightarrow \text{piše u tekstu}$$

$$p_L + p_D = 1 \rightarrow \text{mora biti}$$

$$\frac{1}{2} p_D + p_D = 1 \mid \cdot 2$$

$$p_D + 2p_D = 2$$

$$p_D = \frac{2}{3}$$

$$p_L = \frac{1}{2} \cdot p_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$p_L = \frac{1}{3}$$

$$p_1 = \frac{\overset{\omega_1}{D} \overset{\omega_2}{D} \overset{\omega_3}{D} \overset{\omega_4}{L}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{8}{81}$$

$$p_2 = \frac{\overset{\omega_1}{D} \overset{\omega_2}{D} \overset{\omega_3}{L} \overset{\omega_4}{D}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{8}{81}$$

// :

$$p_3 = p_4 = \frac{8}{81}$$

$$p_5 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$$

$$P(A) = \frac{8}{81} \cdot 4 + \frac{16}{81} = \frac{48}{81} = \frac{16}{27}$$

završite za B ...

$$\begin{aligned}
 \text{ze } B: \quad \omega_6 &= LL & \omega_7 &= DLL \\
 p_6 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} & \omega_7 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27} \\
 P(B) &= p_6 + p_7 = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} = \frac{5}{27} //
 \end{aligned}$$